PART4　接線の方程式

例題

(1)　次の問いに答えよ。

(i)　曲線 $y=x^2-3x+2$ 上の点 $(3,\ 2)$ における接線の方程式を求めよ。

(ii)　曲線 $y=-x^3+x+1$ に接し，傾きが -2 である直線の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $y=x^2-3x+6$ に，点 $(1,\ 0)$ から引いた接線の方程式を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　次の問いに答えよ。

(i)　曲線 $y=-2x^2+5x$ 上の点 $(3,\ -3)$ における接線の方程式を求めよ。

(ii)　曲線 $y=x^3-2x^2+2$ に接し，傾きが -1 である直線の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $y=-x^2+x$ に，点 $(1,\ 1)$ から引いた接線の方程式を求めよ。

第14講　PART4 確認問題

1　曲線 $y=-2x^2+3x$ 上の点 $(2,\ -2)$ における接線の方程式を求めよ。

$y=$ [アイ] $x+$ [ウ]

2　曲線 $y=x^3-5x^2+2$ に接し，傾きが -3 である直線の方程式を求めよ。

$y=-3x+\dfrac{\text{エオ}}{\text{カキ}}$，$y=-3x-$ [ク]

3　曲線 $y=-x^2+3x$ に，点 $(2,\ 3)$ から引いた接線の方程式を求めよ。

$y=x+$ [ケ]，$y=$ [コサ] $x+$ [シ]

PART4　接線の方程式

例題

(1)　次の問いに答えよ。

(i)　曲線 $y=x^2-3x+2$ 上の点 $(3,\ 2)$ における接線の方程式を求めよ。

(ii)　曲線 $y=-x^3+x+1$ に接し，傾きが -2 である直線の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $y=x^2-3x+6$ に，点 $(1,\ 0)$ から引いた接線の方程式を求めよ。

(1) (i)　$f(x)=x^2-3x+2$ とおくと，$f'(x)=2x-3$

よって，点 $(3,\ 2)$ における接線の傾きは　$f'(3)=2\cdot3-3=3$

したがって，点 $(3,\ 2)$ における接線の方程式は　$y=3(x-3)+2$

すなわち　$y=3x-7$

(ii)　$f(x)=-x^3+x+1$ とおくと，$f'(x)=-3x^2+1$

$f'(x)=-2$ より　$-3x^2+1=-2$　　$x^2=1$　　$x=\pm1$

$f(1)=-1^3+1+1=1$，$f(-1)=-(-1)^3+(-1)+1=1$

よって，求める接線の方程式は　$y=-2(x-1)+1$，$y=-2(x+1)+1$

すなわち　$y=-2x+3$，$y=-2x-1$

(2)　$f(x)=x^2-3x+6$ とおくと，$f'(x)=2x-3$

接点の座標を $(a,\ a^2-3a+6)$ とおくと，接線の傾きは　$f'(a)=2a-3$

よって，点 $(a,\ a^2-3a+6)$ における接線の方程式は

$$y=(2a-3)(x-a)+a^2-3a+6$$

すなわち　$y=(2a-3)x-a^2+6$ …… ①

この直線が，点 $(1,\ 0)$ を通るので

$$0=(2a-3)\cdot1-a^2+6 \qquad a^2-2a-3=0 \qquad (a-3)(a+1)=0$$

よって　$a=3,\ -1$

①より　$a=3$ のとき　$y=3x-3$，$a=-1$ のとき　$y=-5x+5$

したがって，求める接線の方程式は　$y=3x-3$，$y=-5x+5$

練習

(1) 次の問いに答えよ。

(i) 曲線 $y=-2x^2+5x$ 上の点 $(3,\ -3)$ における接線の方程式を求めよ。

(ii) 曲線 $y=x^3-2x^2+2$ に接し，傾きが -1 である直線の方程式を求めよ。

(2) 曲線 $y=-x^2+x$ に，点 $(1,\ 1)$ から引いた接線の方程式を求めよ。

(1) (i) $f(x)=-2x^2+5x$ とおくと，$f'(x)=-4x+5$

よって，点 $(3,\ -3)$ における接線の傾きは　$f'(3)=-4\cdot3+5=-7$

したがって，点 $(3,\ -3)$ における接線の方程式は　$y=-7(x-3)-3$

すなわち　$y=-7x+18$

(ii) $f(x)=x^3-2x^2+2$ とおくと，$f'(x)=3x^2-4x$

$f'(x)=-1$ より

$3x^2-4x=-1$　　$3x^2-4x+1=0$　　$(3x-1)(x-1)=0$　　$x=\dfrac{1}{3},\ 1$

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+2=\frac{49}{27},\ f(1)=1^3-2\cdot1^2+2=1$$

よって，求める接線の方程式は　$y=-\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{49}{27},\ y=-(x-1)+1$

すなわち　$y=-x+\dfrac{58}{27},\ y=-x+2$

(2) $f(x)=-x^2+x$ とおくと，$f'(x)=-2x+1$

接点の座標を $(a,\ -a^2+a)$ とおくと，接線の傾きは　$f'(a)=-2a+1$

よって，点 $(a,\ -a^2+a)$ における接線の方程式は

$$y=(-2a+1)(x-a)-a^2+a$$

すなわち　$y=(-2a+1)x+a^2$ …… ①

この直線が，点 $(1,\ 1)$ を通るので

$1=(-2a+1)\cdot1+a^2$　　$a^2-2a=0$　　$a(a-2)=0$

よって　$a=0,\ 2$

①より　$a=0$ のとき　$y=x$，$a=2$ のとき　$y=-3x+4$

したがって，求める接線の方程式は　$y=x,\ y=-3x+4$

第14講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] アイ：-5，ウ：8

[解説]

$f(x)=-2x^2+3x$ とおくと，$f'(x)=-4x+3$

よって，点 $(2,\ -2)$ における接線の傾きは

$$f'(2)=-4\cdot 2+3=-5$$

したがって，点 $(2,\ -2)$ における接線の方程式は

$$y=-5(x-2)-2$$ [A]

すなわち　$\boldsymbol{y=-5x+8}$

[A]　関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の方程式は
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

2

[正解] エオ：67，カキ：27，ク：7

[解説]

$f(x)=x^3-5x^2+2$ とおくと，$f'(x)=3x^2-10x$

また，接線の傾きが -3 であるから

$f'(x)=-3$ とおける。接点の x 座標を求めると [B]

$$3x^2-10x=-3$$

$$3x^2-10x+3=0$$

$$(3x-1)(x-3)=0$$

よって　$x=\dfrac{1}{3}$，3

これらを $f(x)$ に代入して

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3-5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+2=\frac{40}{27}$$

$$f(3)=3^3-5\cdot 3^2+2=-16$$

したがって，求める接線の方程式は

$$y=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{40}{27},\quad y=-3(x-3)-16$$

すなわち　$\boldsymbol{y=-3x+\dfrac{67}{27}}$，$\boldsymbol{y=-3x-7}$

[B]　関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きは，$x=a$ における微分係数 $f'(a)$ で表される。

3 [正解] ケ：1，コサ：−3，シ：9

[解説]

$f(x)=-x^2+3x$ とおくと，$f'(x)=-2x+3$

接点の座標を $(a,\ -a^2+3a)$ とおくと，接線の傾きは

$$f'(a)=-2a+3$$

よって，点 $(a,\ -a^2+3a)$ における接線の方程式は

$$y=(-2a+3)(x-a)-a^2+3a$$ [C]

すなわち

$$y=(-2a+3)x+a^2 \quad \cdots\cdots①$$

この直線が，点 (2，3) を通るので

$$3=(-2a+3)\cdot 2+a^2$$

$$a^2-4a+3=0$$

$$(a-1)(a-3)=0$$

よって　$a=1,\ 3$

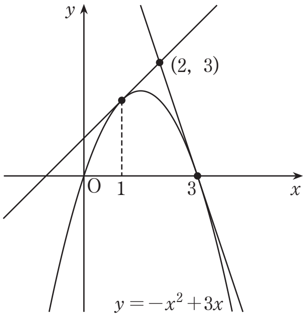
①より

$a=1$ のとき　$y=x+1$

$a=3$ のとき　$y=-3x+9$

したがって，求める接線の方程式は

$$\boldsymbol{y=x+1,\ y=-3x+9}$$



[C]　曲線上にない点 A から引いた接線の方程式
接点の x 座標を「a」などの文字でおき，その文字を用いて接線の方程式を表し，接線が点 A を通るときの a の値を求め，接線の方程式を導く。